1. La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti

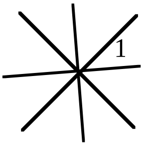
Silvia Sbaragli[1]

In the lessons of compulsory school the difference between the mathematical point and the point in the other contexts (like the iconographic one) is not emphasized. This means that when the point is finally studied in a more sophisticated mathematical sense at high school, it becomes too late for the students to get it: the other meanings have had the upper hand.

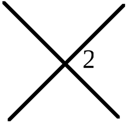
This paper informs of researches made by the author on a sample population of pupils from elementary, lower and higher secondary school.

1. Una provocazione…

Il lettore può osservare le due figure rappresentate e rispondere alle seguenti domande tratte da un lavoro sui concetti figurali di Fischbein (1993):



3a



3b

In 3a ci sono quattro linee che si intersecano (punto 1). In 3b, ci sono due linee che si intersecano (punto 2). Confronta i due punti 1 e 2. Questi due punti sono diversi? Uno di loro è più grande? Se sì, quale? Uno di loro è più pesante? Se sì, quale? I due punti hanno la stessa forma?

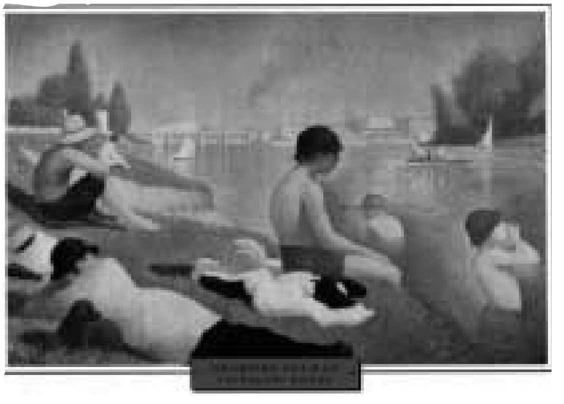
Risposta di un agrimensore di «vecchio stampo» con oltre 40 anni di professione: «*È ovvio che un punto è… un punto, ma nel disegno cambia a seconda di quale pennino usi e così un punto può diventare più grosso o meno grosso. Se usi pennini diversi o se ripassi con un numero sempre maggiore di linee il punto visivamente diventa più grosso*».

L'agrimensore non ha ancora «concettualizzato»[2] o la «concettualizzazione» dipende invece dal contesto?

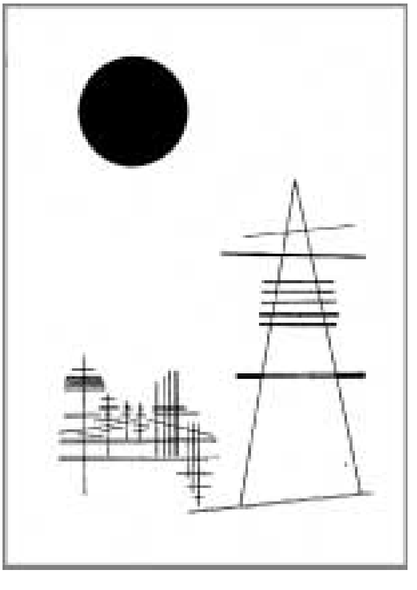
1. Ricercatrice del NRD di Bologna.
2. Siamo consapevoli che stiamo usando in modo molto ingenuo un termine: concettualizzazione, assai complesso e delicato: «*Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la domanda: Che cos'è o Come avviene la concettualizzazione? Resta fondamentalmente un mistero…*» (D'Amore, 2003). Questa scelta consapevole, nasce dall'uso di questo termine da parte di Fischbein (1993) nell'esempio del punto; esempio che rappresenta per noi una forte provocazione che sarà analizzata nel paragrafo 4.

Che cosa avrebbe risposto a queste sollecitazioni Seurat, pittore puntinista? Per Seurat il punto era concepito come un concetto astratto, nel senso inteso da Fischbein, o assumeva grande importanza la dimensione del punto?

Possiamo affermare che Seurat non è riuscito a «concettualizzare» nel senso inteso da Fischbein? Riflettiamo sull'effetto che farebbe il quadro di Seurat qui sotto rappresentato se il punto fosse concepito solo come posizione, «rappresentato» privo di dimensione …



Che cosa potrebbe pensare Kandinsky (1989) della domanda posta da Fischbein, dato che ha intitolato un suo quadro: «Le linee sottili tengono testa alla pesantezza del punto»?



Che cosa penseranno gli aborigeni australiani del punto dato che lo usano come base per rappresentare ogni immagine?

Nel rispondere alla domanda iniziale di Fischbein, chissà a quale contesto avrà pensato il nostro lettore…

2. Da dove nasce l'idea del punto nei diversi ambiti

Dopo due anni dal quindicesimo Convegno di Castel San Pietro dove fu proposto un seminario sul tema: «Infiniti e infinitesimi nella scuola di base», sono nati forti spunti di riflessione e diverse collaborazioni con insegnanti che hanno spinto l'analisi in varie direzioni: una di queste riguarda il punto nei diversi ambiti. Per spiegare il percorso seguito è bene far riferimento ad un articolo precedente (Sbaragli 2003), dove vengono messe in evidenza le convinzioni delle insegnanti elementari relative all'infinito matematico. Tra queste risulta lampante un fenomeno chiamato da Arrigo e D'Amore (1999, 2002): *dipendenza*, in base al quale vi sono più punti in un segmento più lungo, rispetto ad uno più corto (Tall, 1980). È ovvio che, come immagine visiva, un segmento più corto sembra essere incluso nell'altro, quindi vi è una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta, ma è bene tener presente che per l'infinito matematico non vale la nozione euclidea: «*Il tutto è maggiore della sua parte*».

Il fenomeno sopra descritto è legato all'idea di retta vista secondo il «modello della collana» (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002), ossia concepita come una fitta collana formata da perline, che rappresentano i punti, unite da un filo.

Questo viene indicato spesso dagli studenti come modello adatto per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta ed è stato a volte evidenziato dagli alunni come modello fornito dai loro insegnanti di scuola elementare, modello che resiste ad ogni attacco successivo (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002).

Eppure ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come «collana di perle» (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002).

È proprio in questo modello che si possono rileggere diverse convinzioni degli allievi e degli insegnanti legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola. Convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico.

Durante un lavoro di ricerca ancora in corso realizzato a Milano con studenti a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla scuola superiore, si sono ottenute diverse risposte in forma di TEP's (D'Amore, Maier, 2002) relativi agli enti primitivi della geometria, in particolare al punto.

Alla richiesta: «*Immagina di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica*» si sono avute le seguenti risposte (se ne riportano solo alcune tre le oltre 350 in nostro possesso):

«Io penso che il punto matematico sia un punto che fa finire una frase matematica anche per fare finire i numeri». (Terza elementare)

«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni». (Quarta elementare)

«Il punto in matematica è un segnetto così "." oppure è la questione da risolvere.

Il punto in matematica è anche quello che si mette sopra certi numeri es 1˙000.

Nelle calcolatrici il punto viene considerato una virgola.

Il punto può essere anche per le equazioni es 100 x … = 200». (Quinta elementare)

«Un punto in matematica è importante per poter prendere un voto per essere felici». (Prima media)

«Il punto in geometria è il punto di riferimento di una figura». (Seconda media)

«È un punto rotondo che forma le linee». (Terza media)

«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc.». (Terza media)

«Un punto è un piccolo segno ed è un ente geometrico fondamentale». (Prima liceo scientifico)

«Un punto è l'elemento più piccolo preso in considerazione». (Seconda liceo scientifico)

«Un punto è un elemento geometrico, il più piccolo immaginabile tendente a 0. Tra due punti ce n'è sempre un terzo». (Terza liceo scientifico)

«Un punto minimo». (Quarta liceo scientifico)

«. ⟵ questo è un punto». (Quinta liceo scientifico)

«Un luogo geometrico infinitamente piccolo che, collocato in un piano cartesiano, possiede 2 coordinate (x, y)». (Quinta liceo scientifico)

Di seguito si riporta invece uno stralcio di conversazione avvenuta tra insegnanti di scuola elementare come conseguenza della domanda posta dal ricercatore: «*Ci sono più punti nel segmento CD* (di lunghezza maggiore) *o nel segmento AB* (di lunghezza minore)*?»* (Sbaragli, 2003):

B.: Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore.

S.: Quanti in più?

B.: Dipende quanto li fai grandi.

M.: Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD.

Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti che creino ostacoli per gli allievi, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come «collana», per creare immagini più opportune che consentano di concepire punti senza spessore. Per far questo, il soggetto deve poter varcare il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza.

3. Il quadro teorico

L'analisi che affronteremo tenta di mettere in risalto l'importanza del contesto, facendo riferimento ad un approccio situazionista e socio-culturale del costruttivismo sociale. In quest'ottica il sapere, in particolare il sapere matematico, deve:

— in primo luogo essere il prodotto della costruzione attiva dell'allievo (Brousseau, 1986);
— avere le caratteristiche di essere situato, cioè riferito ad un preciso contesto sociale e culturale, pur restando sempre in relazione ad altri contesti;
— essere il frutto di particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale (Brousseau, 1986);
— essere usato e ulteriormente ridefinito in altri contesti sociali e culturali (Jonnasen, 1994).

Facendo queste considerazioni vogliamo inserirci all'interno di una visione «antropologica» che punta tutta l'attenzione sul soggetto che apprende (D'Amore, 2001a; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003), anziché sulla disciplina, privilegiando il «rapporto e l'uso del sapere», piuttosto che il «sapere»; impostazione che contempla la scelta di una filosofia a monte di stampo pragmatica (D'Amore, 2003). È in effetti l'«uso» che condiziona la significatività e quindi il valore di un dato contenuto, che in questo caso coinvolgerà il termine punto in diversi ambiti. In quest'ottica risulta per noi fondamentale far capire all'allievo l'importanza del contesto, quindi considerare i diversi «usi» di un sapere che determinano il significato degli oggetti.

In effetti all'interno della teoria pragmatica da noi scelta come quadro di analisi possibile le espressioni linguistiche, i singoli termini, i concetti, le strategie per risolvere un problema… hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano: per questo vanno opportunamente decodificate, interpretate, selezionate e gestite dall'allievo. Come osserva D'Amore (2003) risulta impossibile all'interno di questa teoria ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è «personale» o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può quindi far altro che esaminare i diversi «usi»: l'insieme degli «usi» determina infatti il significato degli oggetti. Questo non deve significare per l'insegnante lasciare l'apprendimento solamente ad un atto di intuizione o ad una semplice interpretazione personale dell'allievo, soprattutto in ambito matematico dove si rischia che l'immagine intuitiva dell'allievo si trasformi in modello parassita (D'Amore, 1999). Come scrive D'Amore (2003): «*Una delle difficoltà è che all'idea di "concetto" partecipano tanti fattori e tante cause; per dirla in breve, e dunque in modo incompleto, non pare corretto affermare per esempio che "il concetto di retta" (supposto che esista)* (l'esempio è generalizzabile ovviamente anche per il punto) *è quello che risiede nella mente degli scienziati che a questo argomento hanno dedicato la loro vita di studio e riflessione; sembra più corretto affermare invece che vi sia una forte componente per così dire "antropologica" che mette in evidenza l'importanza delle relazioni tra $R_I(X,O)$ [rapporto istituzionale a quell'oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [rapporto personale a quell'oggetto del sapere]* (in questo caso D'Amore fa esplicito riferimento a simboli e termini tratti da Chevallard, 1992)… *Dunque, nella direzione che ho voluto prendere, alla "costruzione" di un "concetto" parteciperebbe tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la parte personale (di chiunque abbia accesso a tale Sapere, quindi anche l'allievo non solo lo scienziato)*».

Ma che cosa succede tradizionalmente per gli enti primitivi della geometria? In particolare per il punto e per la retta? La sensazione è che per questi oggetti matematici tutto venga lasciato semplicemente all'aspetto «personale», affidandoli solitamente ad un semplice atto di intuizione. Questo atteggiamento però rischia di radicare nella mente degli allievi modelli parassiti come il cosiddetto «modello della collana» che vincola l'apprendimento matematico successivo, facendo prevalere l'aspetto figurale su quello concettuale (Fischbein, 1993). Riteniamo invece didatticamente importante seguire un approccio pragmatico, con una costante mediazione da parte dell'insegnante per far sì che gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti non rimangano solo «personali» ma diventino «istituzionali» (Chevallard, 1992; D'Amore 2001a, 2003; Godino e Batanero, 1994).

In questa direzione rientrano anche le considerazioni riportate in Fischbein (1993): «*Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante».* Queste considerazioni di Fischbein riferite ad allievi di scuola superiore dovrebbero a nostro parere essere trasferite ad ogni livello scolastico, anzi riteniamo indispensabile che gli insegnanti possiedano questa attenzione didattica fin dalla scuola elementare. A partire dalle riflessioni fin qui emerse, si sono strutturate alcune interessanti attività che sono state progettate e sperimentate insieme ad un gruppo di insegnanti di scuola elementare di Milano[3]. Si è partiti da questo livello scolastico poiché dai risultati dei TEPs sopra menzionati, emerge chiaramente come siano già presenti in bambini di scuola elementare misconcetti sui diversi enti geometrici; idee ingenue che risultano molto spesso legate a contesti diversi, ma che vengono trasferiti con disinvoltura anche in ambito matematico soprattutto a causa di una analogia linguistica. In queste attività, le finalità educative e didattiche che ci siamo posti non si riducono all'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze da parte degli studenti, bensì mirano all'«uso» del sapere da parte di ciascuno. Si tratta quindi non solo di imparare, ma anche di saper gestire il proprio sapere e di fare le scelte opportune di fronte ad una complessità di informazioni o ad un evento problematico.

Riprendendo le parole di Gardner (1993): «*Uno degli obiettivi base dell'educare al comprendere o insegnare al comprendere è: formare la capacità del bambino a trasferire ed applicare la conoscenza acquisita a più situazioni e a più contesti*».

Per quanto riguarda in particolare il punto, basta cercare in un qualsiasi dizionario, come ad esempio il «Grande dizionario della lingua italiana» edito dalla UTET, per trovare per la parola punto circa 40 significati diversi; inoltre, se si guardano le locuzioni, le espressioni d'uso corrente, è possibile rintracciare per questo termine per lo meno 200 contesti d'uso diversi. Ovviamente tra questi significati vi è anche quello di punto matematico, ma questo didatticamente di solito viene lasciato all'intuizione o viene affrontato tardi rispetto agli altri, provocando così una sedimentazione esclusiva degli altri significati. In effetti, nella scuola di base, di solito non si mette in evidenza la differenza che c'è tra il punto matematico e il punto negli altri contesti (come quello figurale). Questo fa sì che, quando finalmente il punto alle scuole supe-

3. Colgo l'occasione per citare e ringraziare: Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Carla Nobis, Adriana Ponti, Mirella Ricci.

riori viene affrontato in un senso matematico più sofisticato, per gli allievi risulta troppo tardi: gli altri significati hanno preso il sopravvento, diventando così inaccettabile l'idea di un nuovo significato che contraddice quelli fino ad allora sedimentati.

4. La rilettura della provocazione

Il primo paragrafo di questo articolo voleva essere una provocazione per far riflettere sull'importanza del contesto. Rimandiamo il lettore alla prima domanda di questo paragrafo e cerchiamo di capire di che cosa si tratta. Nel famoso articolo del 1993, relativo ai concetti figurali, Fischbein presenta la situazione sperimentale del punto, come intersezione di 4 o di 2 segmenti, che era stata rivolta a soggetti di età compresa tra i 6 e gli 11 anni. Le domande poste erano volutamente ambigue. Come afferma Fischbein (1993), queste domande potevano essere considerate o da un punto di vista geometrico o da un punto di vista materiale (grafico).

L'intenzione era di scoprire l'evoluzione con l'età dell'interpretazione dei soggetti e la possibile apparizione dei concetti figurali (punto, linea).

Come riferisce Fischbein, i risultati mostrano un'evoluzione relativamente sistematica delle risposte da una rappresentazione concreta ad una concettuale-astratta. Ma siamo certi che l'interpretazione concettuale sia esclusivamente quella astratta, o questo dipende dal contesto? È certo che in ambito matematico la concettualizzazione del punto si ha quando si è in grado di astrarre e di concepire un punto come privo di dimensioni, ma nella domanda non si è parlato di punto matematico, quindi l'attenzione poteva concentrarsi su un qualsiasi tipo di punto: per l'agrimensore, per il pittore, per l'aborigeno, per il disegnatore, per il musicista, per il geografo... A nostro parere un agrimensore di «vecchio stampo» abituato a disegnare con i pennini che non sia in grado di distinguere la diversa grossezza di un punto, fatto ad esempio con un pennino 0,2 o 0,8, non è riuscito a concettualizzare nel suo ambito. La concettualizzazione quindi dipende dal contesto, per questo riteniamo che nella esplicitazione della domanda risultava fondamentale chiarire l'ambito di riferimento.

Viene lecito domandarsi: è sempre vero che la percezione grafica sia meno concettuale di quella astratta, o forse questo dipende dal contesto di riferimento? In particolari ambiti, come quello grafico, l'aspetto figurale può essere ritenuto più concettuale di quello astratto? A nostro parere, notare la diversa dimensione di due punti, richiede una sensibilità, una finezza e un grado di «concettualizzazione» fondamentale in certi contesti. Da queste considerazioni emerge da parte nostra l'esigenza di esplicitare agli allievi l'ambito al quale ci riferiamo quando poniamo le domande per essere certi che le risposte, inattese ed insperate, non siano il risultato derivante dal fatto che l'intervistato si è collocato in un ambito diverso rispetto a quello immaginato dall'intervistatore. In un certo senso sarebbe come auspicare che vengano fornite le soluzione di un'equazione in un particolare insieme, senza però avere esplicitato l'insieme di definizione.

Da questo punto di vista potrebbe risultare pericoloso, se generalizzato ad ogni ambito, ciò che auspica Fischbein (1993), ossia che il punto si stacchi dal contesto, così da preparare il concetto geometrico di punto. In effetti riteniamo importante che l'allievo sia consapevole del contesto nel quale si sta muovendo e che elabori un concetto coerentemente rispetto al particolare ambito, ma allo stesso tempo auspichiamo che l'allievo sappia variarne l'«uso» all'interno dello stesso contesto e in contesti diversi.

5. Un breve cenno sulle attività

Le attività che abbiamo strutturato insieme agli insegnanti di scuola elementare si basano sull'«uso» della parola punto in diversi contesti: nella musica, nella lingua, nella geografia, nell'arte, nel disegno, nella matematica… analizzando in dettaglio ciò che caratterizza ogni contesto. Per esempio se parliamo della pittura facciamo notare che si tratta di un punto con caratteristiche particolari come la grandezza, la forma, la pesantezza, il colore, … che dipendono dagli strumenti con cui si è disegnato; si tratta di un punto che assume significato diverso a seconda di ciò che l'artista vuole esprimere. Entrando nel mondo della matematica invece si può riflettere e discutere sulla scelta di Euclide relativa al punto privo di dimensione, che è stata assunta da questo matematico come «punto» di partenza, «regola iniziale» del grande gioco della matematica al quale si invitano i bambini a partecipare. Ma come in ogni gioco che si rispetti, per partecipare è necessario accettarne e rispettarne «le regole», che in questo caso condurranno a saper «vedere con gli occhi della mente». La capacità di saper accettare, rispettare e condividere le scelte degli altri e l'esplicitazione delle caratteristiche dei diversi ambiti, rappresentano per questa trattazione elementi fondamentali per poter consentire ai bambini di staccarsi dalla fisicità dei punti che solitamente disegnano, per accettare un mondo diverso, quello della matematica, dove esistono «regole» diverse da quelle della loro quotidianità.

Le attività menzionate, ed altre ancora, sono la base di articoli per l'anno scolastico 2003/2004 rientranti in laboratori didattici all'interno della rivista, assai diffusa in Italia, dal titolo: «La Vita Scolastica», rivolta a docenti di scuola elementare. Questo rappresenta a nostro parere un grande risultato, in quanto la problematica degli enti primitivi della geometria e dell'infinito matematico avrà così una ricaduta didattica sempre più ampia, consentendo a molti insegnanti di avvicinarsi a queste tematiche e alle problematiche ad esse collegate. Inoltre è significativo il fatto che gli articoli siano strutturati sotto forma di laboratori[4], dove gli allievi diventano protagonisti *costruendo,* anche nel senso concreto del termine, oggetti che tentano di sradicare diversi misconcetti. In questo modo si instaurano meccanismi relazionali (insegnanti-allievi) molto particolari e relazioni cognitive (allievo-matematica) di estremo interesse teorico (Caldelli, D'Amore, 1986; D'Amore, 1988, 1990-91, 2001b).

4. Come sostiene D'Amore (2001b): «*Il laboratorio è un ambiente dove si fanno oggetti, si lavora concretamente, si costruisce qualche cosa; soprattutto è caratteristica del laboratorio una certa qual pratica inventiva; nel Laboratorio deve essere viva una tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualche cosa di non ripetitivo né banale, altrimenti basterebbe … un'officina*».

Arrigo G., D'Amore B.

«Lo vedo ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.

«Lo vedo ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57, 2002.

Brousseau G.

Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115, 1986.

Caldelli M. L., D'Amore B

Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo. Firenze: La Nuova Italia, 1986.

Chevallard Y.

Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112, 1992.

D'Amore B.

Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica.* 3, 41-51, 1988.

D'Amore B.

Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*. In 4 puntate sui numeri: 11 (novembre 1990); 1 (gennaio 1991); 5 (maggio 1991); 9 (settembre 1991).

D'Amore B.

Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora. III ed. 2001, 1999.

D'Amore B.

Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione «ingenua» in una teoria «realista» vs il modello «antropologico» in una teoria «pragmatica». *La Matematica e la sua didattica*. 1, 4-30, 2001a.

D'Amore B.

Nel segno della creatività. *La Vita Scolastica*. 1. Settembre 2001. 41-43, 2001b.

D'Amore B.

Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Pitagora: Bologna, 2003.

D'Amore B., M.I. Fandiño Pinilla

Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia (Cipro), Intercollege Press Ed. Atti del «Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130, 2001.

D'Amore B., Maier H.

Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEP's) e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica.* 2. 144-189, 2002.

Fischbein E.

The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 24, 139-162, 1993.

Gardner H.

Educare al comprendere. Milano: Feltrinelli, 1993.

Gimenez J.

About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26, 1990.

Godino J., Batanero C.

Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355. [Traduz. italiana Bologna: Pitagora, 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro], 1994.

Jonassen D.H.

Thinking Tecnology. *Educational Technology*. 34-4, 34-37, 1994.

Kandinsky V.V.

Punto, linea, superficie. Biblioteca Adelphi. 16, 1989.

Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C.
An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisboa. 185-192, 1994.

Sbaragli. S.
Le convinzioni delle insegnanti elementari sull'infinito matematico Prima parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 26A, 2-3. Seconda parte in corso di stampa, 2003.

Tall D.
The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284, 1980.